

# MATEMÁTICA BÁSICA

AUTOR

MÁRIO LUIZ ALVES DE LIMA



# MATEMÁTICA BÁSICA

AUTOR

MÁRIO LUIZ ALVES DE LIMA

1ª EDIÇÃO

SESES

RIO DE JANEIRO 2016



**Estácio**

**Conselho editorial** LUIS CLAUDIO DALLIER, ROBERTO PAES E PAOLA GIL DE ALMEIDA

**Autor do original** MÁRIO LUIZ ALVES DE LIMA

**Projeto editorial** ROBERTO PAES

**Coordenação de produção** PAOLA GIL DE ALMEIDA, PAULA R. DE A. MACHADO E ALINE  
KARINA RABELLO

**Projeto gráfico** PAULO VITOR BASTOS

**Diagramação** BFS MEDIA

**Revisão linguística** BFS MEDIA

**Revisão de conteúdo** JONAS DA CONCEIÇÃO RICARDO

**Imagem de capa** CRISTINAMURACA | SHUTTERSTOCK.COM

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra pode ser reproduzida ou transmitida por quaisquer meios (eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia e gravação) ou arquivada em qualquer sistema ou banco de dados sem permissão escrita da Editora. Copyright SESES, 2016.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L732M LIMA, MÁRIO LUIZ ALVES DE  
Matemática básica / Mário Luiz Alves de Lima.  
Rio de Janeiro : SESES, 2016.  
80 p. : IL.

ISBN: 978-85-5548-293-9

1. Conjuntos. 2. Números naturais. 3. Funções. 4. Equações.  
5. Desigualdades. I. SESES. II. Estácio.

CDD 510

Diretoria de Ensino — Fábrica de Conhecimento  
Rua do Bispo, 83, bloco F, Campus João Uchôa  
Rio Comprido — Rio de Janeiro — RJ — CEP 20261-063

# Sumário

Prefácio	5
1. Conjuntos Numéricos	7
1.1 Noções Elementares	8
1.2 Conjuntos Importantes	9
1.2.1 Operações com Conjuntos	9
1.2.2 Propriedades	11
1.3 Principais conjuntos numéricos	12
1.3.1 Conjunto dos Naturais ( $\mathbb{N}$ )	12
1.3.2 Conjunto dos Inteiros ( $\mathbb{Z}$ )	13
1.3.3 Conjunto dos Racionais ( $\mathbb{Q}$ )	13
1.3.4 Conjunto dos Irracionais ( $\mathbb{I}$ )	14
1.3.5 Conjunto dos Reais ( $\mathbb{R}$ )	14
1.4 Relações	16
1.4.1 Par ordenado	16
1.4.2 Sistema Cartesiano	16
1.4.3 Relação binária e relação inversa	17
2. Conceitos Fundamentais da Álgebra e Aritmética	23
2.1 Potências	24
2.2 Raízes	25
2.3 Expressões e Operações Algébricas	28
2.4 Fatoração e Produtos Notáveis	28
3. Proporcionalidade	37
3.1 Razão	38
3.2 Divisão Proporcional	41

3.3 Regra de Três Simples e Composta	44
--------------------------------------	----

4. Introdução ao Estudo das Funções	51
-------------------------------------	----

4.1 Conceito e Notações	52
4.2 Produto Cartesiano	52
4.3 Domínio, Contradomínio e Imagem	53
4.4 Funções Injetivas, Sobrejetivas, Bijetivas e Funções Inversas	55
4.5 Funções Pares e Ímpares	56
4.6 Funções Compostas	56
4.7 Gráfico de uma Variável Real	57
4.8 Funções Algébricas	57
4.8.1 Função Constante	57
4.8.2 Função Afim	57

# Prefácio

Prezados(as) alunos(as),

Esta obra destina-se a tornar o ensino da Matemática um pouco mais agradável e desmistificar o seu ensino. Pretendemos, ao final deste livro, convencê-los de que nossa disciplina é extremamente útil e mostrar-lhes a real importância dela no cotidiano da sociedade.

Por meio de tópicos básicos e necessários à construção de um saber matemático, o projeto está estruturado em quatro capítulos. Ao final do Capítulo 4, apresentamos o gabarito de todos os exercícios, além de comentarmos alguns deles. Estes exercícios comentados visam ao auxílio dos estudos dos nossos leitores, pois sabemos que a prática é norteadora da nossa atividade.

O livro procura estabelecer um diálogo com o nosso aluno, simulando uma conversa de sala de aula. Dessa forma, nós queremos que o aprendizado seja o mais gradual possível, sem solavancos ou formalismos desnecessários ao nosso público-alvo.

Apreciem sem moderação, passem pelo maravilhoso domínio matemático e curtam o nosso livro. Estamos abertos a quaisquer sugestões e correções. Afinal, este trabalho é de vocês e para vocês. Bons estudos e esperamos que gostem!

**Bons estudos!**



1

# Conjuntos Numéricos



# 1. Conjuntos Numéricos

O estudo introdutório de conjuntos numéricos se torna necessário e importante ao aluno porque fornece a base para a construção do conhecimento da disciplina de Matemática, sendo imprescindível para algumas áreas profissionais, tais como Engenharia, Física, Arquitetura, entre outras. As construções apresentadas acompanharão o aluno ao decorrer de toda a sua formação acadêmica.

Intuitivamente, sabemos que conjuntos são coleções de elementos. Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos da teoria de conjuntos. Aqui, nomearemos todos os conjuntos com letras maiúsculas, e seus elementos, com letras minúsculas.



## OBJETIVOS

- Apresentar os conjuntos numéricos dos naturais, inteiros, racionais e reais;
- Realizar e compreender as operações com conjuntos;
- Apresentar a noção de intervalo numérico; e
- Realizar e compreender as operações com intervalos.

### 1.1 Noções Elementares

Os conjuntos que conhecemos são geralmente representados com chaves  $\{\}$  ou por diagramas de Venn. Utilizaremos, neste livro, a representação com chaves.



## EXEMPLO

Você conhece a série de Fibonacci?  $A = \{1, 1, 2, 3, 5, 8\}$  é o conjunto dos seis primeiros números desta série, a qual dá origem à famosa proporção áurea. Você sabia que a proporção áurea foi utilizada por Leonardo da Vinci no quadro *Mona Lisa*?

## 1.2 Conjuntos Importantes

Vamos, agora, apresentar a definição de alguns conjuntos que serão importantes ao longo do curso. Tome nota, pois eles serão citados em vários momentos.

**I. O conjunto vazio** –  $\emptyset$  – é aquele que não tem nenhum elemento. (Cuidado! A notação pode pregar peças. Por exemplo: o conjunto representado por  $B = (\emptyset)$  não é vazio. Ele tem um elemento, que é o  $\emptyset$ .

**II. Conjunto unitário** é aquele que tem apenas um elemento. Então, o conjunto  $B = (\emptyset)$ , apresentado anteriormente, na verdade é um conjunto unitário!

**III. Conjunto universo** é um conjunto ao qual pertencem todos os elementos em questão.

**IV.** Dois conjuntos,  $A$  e  $B$ , são ditos **iguais** quando todos os seus elementos são iguais. Então, um conjunto  $A = \{1, 2, 7\}$  e um conjunto  $B = \{2, 7, 1\}$  são ditos iguais, uma vez que têm os mesmos elementos.

**V.**  $A$  é dito **subconjunto** de  $B$  se, e somente se, todo elemento de  $A$  também pertencer a  $B$ . Utiliza-se a notação  $A \subset B$  (lê-se “ $A$  está contido em  $B$ ”).

Temos duas propriedades importantes para os subconjuntos:

- a)  $(A \subset B \text{ e } B \subset A) \Rightarrow A = B$
- b)  $(A \subset B \text{ e } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$



### EXERCÍCIO RESOLVIDO

Tome os conjuntos  $A = \{7, 12\}$  e  $C = \{12\}$ . Sabendo que  $A \subset B$ , determine a relação entre  $B$  e  $C$ .

**Solução:** Veja que, como todos os elementos de  $C$  pertencem a  $A$ , então  $C \subset A$ . Concorde? Então, pela propriedade apresentada, devemos ter que  $C \subset B$ .

**VI.** Dois conjuntos são ditos **disjuntos** quando não há nenhum elemento comum entre eles. Sendo assim, se  $D = \{11, 13, 15\}$  e  $E = \{12, 14, 16\}$ , então os conjuntos  $D$  e  $E$  são disjuntos.

### 1.2.1 Operações com Conjuntos

Agora que já conhecemos os principais tipos de conjuntos, vamos aprender as operações que podem ser efetuadas com eles.

**I.** A união ( $\cup$ ) de dois conjuntos é formada por todos os elementos que pertencem a A ou B. Temos  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$  (lê-se “A união B é igual a x, tal que x pertence a A ou x pertence a B”). Se, por exemplo, tivermos  $A = \{13, 21, 24\}$  e  $B = \{8, 55, 89\}$ , então a união entre os conjuntos A e B será dada por  $A \cup B = \{8, 13, 21, 24, 55, 89\}$ .

**II.** A interseção ( $\cap$ ) de dois conjuntos é formada por todos os elementos que pertencem, simultaneamente, a A e B. Temos  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$  (lê-se “A interseção B é igual a x, tal que x pertence a A e x pertence a B”). Note que, caso a interseção entre dois conjuntos seja vazia, então esses conjuntos são ditos disjuntos, conforme vimos anteriormente! Você concorda? Então, analisando os conjuntos  $A = \{13, 21, 23\}$ ,  $B = \{8, 55, 89\}$  e  $C = \{13, 34, 55\}$ , temos que  $A \cap B = \{13, 34\}$ , que  $B \cap C = \{55\}$  e, como acabamos de definir,  $A \cap B = \emptyset$ . Não se esqueça de que  $A \cap B = \{\emptyset\}$  e  $A \cap B = \emptyset$  não representam a mesma coisa. Dizer que  $A \cap B = \{\emptyset\}$ , nesse caso, seria afirmar que A e B têm o elemento  $\emptyset$  em comum, o que, neste caso, não é verdade.

**III.** Define-se diferença entre A e B o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B. Temos  $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$  (lê-se “A menos B é igual a x, tal que x pertence a A e x não pertence a B”). O conjunto  $A - B$  é, também, conhecido como complementar de A em relação a B ( $C_A^B$ ), se  $B \subset A$ . O complementar de A em relação ao universo U é representado por  $A^C$ .



## EXEMPLO

Se tivermos  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  como o conjunto dos cinco primeiros números ímpares e  $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$  como o conjunto dos cinco primeiros números primos, como ficarão as operações entre eles?

**Solução:** Teremos, desse modo:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ , de modo que na união constem todos os elementos que estão tanto em A quanto em B;

$A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$ , de forma que na interseção estejam apenas os elementos em comum entre A e B;

$A - B = \{9\}$ , uma vez que o único elemento que está em A mas não está em B é o número 9; e

$B - A = \{2\}$ , uma vez que o único elemento que está em B mas não está em A é o número 2.

### 1.2.2 Propriedades

Já conhecemos os principais conjuntos e as operações que são possíveis de executar. Agora, veremos as propriedades inerentes aos conjuntos. É sugerido que você não apenas leia cada propriedade, mas tente imaginar o porquê de ela ser válida. Aqui, haverá exercícios após as propriedades mais complexas, de modo a tornar seu entendimento mais palpável.

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três conjuntos arbitrários e  $U$  o conjunto universo, temos:

- I.**  $A \cup B = A$ .
- II.**  $A \cup \emptyset = A$ .
- III.**  $A \cup U = U$ .
- IV.**  $A \cap A = A$ .
- V.**  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .
- VI.**  $A \cap U = A$ .
- VII.**  $A \cup B = B \cup A$ .
- VIII.**  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ .
- IX.**  $A \cap B = B \cap A$ .
- X.**  $A \cap B (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ .
- XI.**  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
- XII.**  $A \cap B (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
- XIII.**  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ .



## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Exercício para verificar as propriedades XI) e XII):

Sejam  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 5\}$  e  $C = \{2, 4, 6, 8\}$ . Calcule:

- (a)  $A \cup B$ ; (b)  $A \cup C$ ; (c)  $B \cup C$ ; (d)  $A \cap B$ ; (e)  $A \cap C$ ; (f)  $B \cap C$ ; (g)  $A \cup (B \cap C)$ ;  
(h)  $A \cap (B \cup C)$ ; (i)  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ ; (j)  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ; (k)  $B - C$ ;  
(l)  $A \cap (B - C)$ ; (m)  $(A \cap B) - (A \cap C)$ .

- XIV.**  $A^c \cap A = \emptyset$ .
- XV.**  $U^c = \emptyset$  e  $\emptyset^c = U$ .
- XVI.**  $(A^c)^c = A$ .
- XVII.**  $A - B = A \cap B^c = B^c - A^c$ .
- XVIII.**  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ,
- XIX.**  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .
- XX.**  $A \cup B = A^c \cap B^c)^c$ .
- XXI.**  $A \cup B = A \cup (B - (A \cap B)) = A \cup (A^c \cap B)$ .

**XXII.**  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ .

**XXIII.**  $A = A \cup (A \cap B) = A \cap B \cup (A - B)$ .

Exercício para verificar as propriedades XXI) a XXIII): Sejam  $A = \{1, 3, 5, 79\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$  e  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Encontre:

- (a)  $A^c$ ; (b)  $B^c$ ; (c)  $A \cup B$ ; (d)  $A \cap B$ ; (e)  $A - B$ ; (f)  $B - (A \cap B)$ ; (g)  $A^c \cap B$ ;  
 (h)  $A \cup (B - (A \cap B))$ ; (i)  $A \cup (A^c \cap B)$ ; (j)  $A^c \cup B^c$ ; (k)  $(A^c \cup B^c)^c$ ;  
 (l)  $A \cup (A \cap B)$ ; (m)  $A \cap (A \cup B)$ ; (n)  $(A \cap B) \cup (A - B)$ .

### 1.3 Principais conjuntos numéricos

Agora, vamos tratar dos principais conjuntos numéricos. São eles: Naturais (N), Inteiros (Z), Racionais (Q) e Reais (R). Veremos, ainda, que  $N \subset Z \subset Q \subset R$ .

#### 1.3.1 Conjunto dos Naturais (N)

O conjunto dos números Naturais, N, é o conjunto fundamental dos números que conhecemos desde que aprendemos a contar. Você lembra? Ele é definido por:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Este conjunto apresenta as seguintes propriedades:

**A. Relacionadas à adição:**

I. Associativa:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,  $\forall a, b, c, \in N$ . (1)

II. Comutativa:  $a + b = b + a$ ,  $\forall a, b, \in N$ . (2)

III. Elemento neutro:  $a + 0 = a$ ,  $\forall a \in N$ . (3)

**B. Relacionadas ao produto:**

IV. Associativa:  $(ab)c = a(bc)$ ,  $\forall a, b, c \in N$ . (4)

V. Comutativa:  $ab = ba$ ,  $\forall a, b \in N$ . (5)

VI. Elemento neutro:  $a \cdot 1 = a$ ,  $\forall a \in N$ . (6)

Temos, ainda, uma propriedade do produto em relação à adição:

VII. Distributiva:  $a(b + c) = ab + ac$ ,  $\forall a, b, c, \in N$ . (7)

Conseguiu lembrar-se de todas? Elas representam todas as operações fundamentais do conjunto dos Naturais. Tome nota e não se esqueça dessas propriedades! Elas são válidas para todos os próximos conjuntos!

### 1.3.2 Conjunto dos Inteiros ( $\mathbb{Z}$ )

O conjunto dos números Inteiros,  $\mathbb{Z}$ , é aquele que aprendemos quando vimos, pela primeira vez, o que são números negativos. O conjunto  $\mathbb{Z}$  é definido por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Pelo fato de o conjunto dos Naturais ser subconjunto de  $\mathbb{Z}$ , é interessante definir os seguintes subconjuntos:

- I. Inteiros não negativos:  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- II. Inteiros não positivos:  $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$
- III. Inteiros não nulos:  $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$
- IV. Inteiros positivos:  $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$
- V. Inteiros negativos:  $\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, \dots\}$

Você se lembra das propriedades (1) a (7)? Como foi dito anteriormente, elas também são válidas em  $\mathbb{Z}$ ! Há, ainda, uma propriedade que não existe no conjunto dos Naturais. Nos Inteiros, temos:

I) Simétrico ou oposto aditivo:  $a + (-a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}. \quad (8)$

Agora, você concorda que podemos definir a subtração?

Fazemos  $a - b = a + (-b)$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Agora já temos adição, multiplicação e subtração, certo? Dê um palpite. Qual das quatro operações ainda não pôde ser definida? Se você pensou na divisão ou quociente, acertou! Sua definição só foi possível com o surgimento do conjunto dos Racionais ( $\mathbb{Q}$ ).

### 1.3.3 Conjunto dos Racionais ( $\mathbb{Q}$ )

A partir de agora, iremos tratar de números que podem ser representados

por frações da forma  $q = \left(\frac{a}{b}\right)$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^*$  (Isso mesmo, o número  $b$  deve ser

diferente de zero!), com as seguintes definições:

$$\text{I. } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\text{II. } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\text{III. } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Na fração  $\frac{a}{b}$ ,  $a$  é o numerador e  $b$  é o denominador (Guarde esses nomes!

Você irá precisar lembrar deles!). Se  $a$  e  $b$  forem primos entre si, isto é, se  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então a fração será denominada **irredutível**.

Aqui, são válidas as propriedades (1) a (8), e define-se, ainda, a seguinte:

$$\text{I. Simétrico ou inverso multiplicativo: } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \frac{a}{b} \neq 0.$$

Agora, finalmente, podemos definir a operação de quociente ou divisão, fazendo  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ , sendo as duas frações não nulas.

Segue um questionamento: todos os números podem ser escritos em forma de fração? Como você escreveria  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ , para  $a$  e  $b$  inteiros? Não conseguiu?

Isso se deve ao fato de ainda não termos apresentado o conjunto dos Irracionais!

#### 1.3.4 Conjunto dos Irracionais (I)

Para contemplar os números que não podem ser escritos em forma de fração, criou-se o conjunto dos Irracionais (I). Este conjunto abrange os números como  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ , e etc. Agora conseguimos representar todos os números que conhecemos, certo?

#### 1.3.5 Conjunto dos Reais (R)

O conjunto dos números Reais é formado pela união do conjunto dos números racionais (Q) com o conjunto dos números Irracionais (I).

Para os números Reais, valem todas as propriedades apresentadas nesta seção (isso, aquelas que já vimos) e podemos representá-los por pontos sobre uma reta, chamada **reta real**.



Figura 1.1 –

Você notou que existem números positivos e negativos? Números inteiros, fracionários e outros que não podem ser nem um nem outro? O conjunto dos Reais abrange todos estes!

Introduzimos, aqui, dois conceitos que são amplamente utilizados na matemática.

**a) Intervalos:**

São subconjuntos dos números reais. Há quatro possibilidades:

**I.** Intervalo fechado:  $[a, b]$

**II.** Intervalo aberto:  $(a, b)$

**III.** Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita:  $[a, b)$

**IV.** Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita:  $(a, b]$

Se  $a$  e  $b$  forem finitos, diz-se que os intervalos acima são **limitados**. Nestes, o número  $a$  é denominado **ínfimo** ou **extremo inferior** do intervalo, enquanto  $b$  é denominado **supremo** ou **extremo superior**.

Se  $a \rightarrow \infty$  e/ou  $b \rightarrow \infty$ , diz-se que o intervalo é **ilimitado**.

**b) Módulo ou valor absoluto de um número real:**

Chamamos de módulo  $|x|$  de um número real  $x$  a sua distância à origem do sistema de coordenadas. Sua definição matemática é:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Então, de fato, o módulo representa quanto o número está longe do zero. Você concorda? Como consequência disso, pelo fato de o módulo representar a distância de  $x$  à origem, devemos ter  $|x| \geq 0, x \in \mathbb{R}$ .

Seguem suas propriedades:

**I.**  $|x| = |-x|$ .

**II.**  $|x^2| = |x|^2$ .



**III.**  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$

**IV.**  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

**V.**  $|a - b| = |b - a|.$

**VI.**  $|a + b| \leq |a| + |b|.$

**VII.** Se  $a > 0$ ,  $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a.$

**VIII.** Se  $a > 0$ ,  $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$

**IX.** Se  $a > 0$ ,  $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$  ou  $x > a.$

## 1.4 Relações

### 1.4.1 Par ordenado

Par ordenado é todo conjunto composto por dois elementos. Um par ordenado composto pelos elementos  $a$  e  $b$  é representado por  $(a, b)$ . Por definição, teremos  $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$  e  $b = d$ . Tudo certo até aqui? Então, se forem iguais, o primeiro termo será igual ao primeiro, e o segundo será igual ao segundo.

### 1.4.2 Sistema Cartesiano

Um sistema cartesiano é composto por dois eixos ( $x$  e  $y$ , neste caso), perpendiculares no ponto  $O$ , definindo um plano que contém o ponto  $P$ . Abaixo, temos a representação do plano cartesiano.

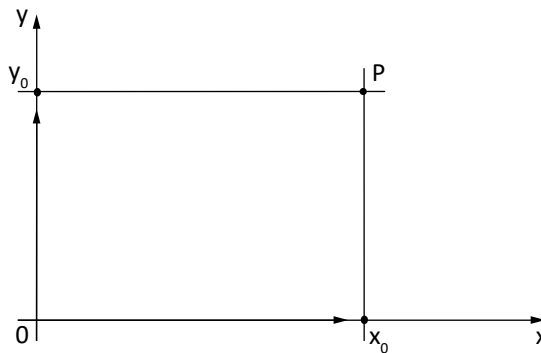


Figura 1.2 –

Definimos  $x_0$  como **abscissa** de  $P$ ,  $Y_0$  como **ordenada** de  $P$ , o par ordenado  $(x_0, y_0)$  como as **coordenadas de  $P$** , o eixo das abscissas como o **eixo  $x$** , o eixo das ordenadas como o **eixo  $y$**  e  $O$  como a **origem do sistema**. Dê um palpite. Essas retas  **$x$**  e  **$y$**  deverão ser representadas em que conjunto? Se você pensou nos Reais, acertou.

Ainda, definimos como **produto cartesiano** de  $A$  por  $B$  o conjunto  $A \times B$  cujos elementos são pares ordenados  $(x, y)$  tais que  $x \in A$  e  $y \in B$ . Assim,  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$ .

### 1.4.3 Relação binária e relação inversa

Define-se a relação binária  $R$  de  $A$  (conjunto de partida) em  $B$  (conjunto de chegada ou contradomínio) como todo subconjunto de  $A \times B$ . Ou seja,  $R$  é a relação binária de  $A$  em  $B \Leftrightarrow R \subset A \times B$ .

Dado um par ordenado  $(x, y)$ , caso ele pertença à relação  $R$ , escrevemos  $(x, y) \in R \Leftrightarrow x R y$ .

Da mesma forma, definimos relação inversa  $R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$ .



## ATIVIDADES

01. Sendo  $A = (-\infty, -1)$ ,  $B = (-5, -2)$  e  $C = (-1, 4)$ , obtenha:

- a)  $A \cap B$
- b)  $A \cup B$
- c)  $A \cap C$

02. Quais das proposições abaixo não são verdadeiras?

- a)  $N \subset Z \subset Q$
- b)  $Z \cap I = \emptyset$
- c)  $Z \supset Q$
- d)  $\{0\} \subset Q$
- e)  $Q_+^* \cap Z = N$
- f)  $Q \cap R = Q$

03. Determine os conjuntos  $A \cup B$  e  $A \cap B$ , sendo  $A = (-3, 1)$  e  $B = \{x \in R \mid 0 \leq x < 2\}$ .

04. Sendo  $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1\}$ ,  $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$  e  $G = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$  determinar:

- a)  $E \cap F$ .
- b)  $E \cup F$ .
- c)  $F \cap G$ .
- d)  $F \cup G$ .
- e)  $E \cap G$ .
- f)  $E \cup G$ .

05. As revistas mais vendidas em uma banca de jornal, num certo mês, foram A, B e C. O jornaleiro constatou que as vendas do mês estavam de acordo com a tabela abaixo:

REVISTAS	QUANTIDADE VENDIDA
A	150
B	120
C	80
A e B	60
B e C	40
A e C	20
A, B e C	15
OUTRAS	70

Tabela 1.1 –

- a) Quantas revistas foram compradas nesse mês?
- b) Dentre os consumidores de A, B e C, quantos compraram apenas duas dessas revistas?
- c) Quantos não compraram a revista C?
- d) Quantos não compraram a revista B nem a revista C?

06. Dos 30 alunos de um pré-vestibular, sabe-se que 18 são do sexo masculino, 13 são maiores de idade e 7 são mulheres menores de idade. Quantos candidatos masculinos são menores de idade?

07. Considere os seguintes subconjuntos de números naturais:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$P = \{x \in N \mid 6 \leq x \leq 20\}$$

$$A = \{x \in P \mid x \text{ é par}\}$$

$$B = \{6, 8, 12, 16\}$$

$$C = \{x \in P \mid x \text{ é múltiplo de } 5\}$$

a) 2                      b) 3                      c) 4                      d) 5

- a) 3                                  c) 20  
b) 10                                 d) 21

a) 8                      c) 12  
b) 10                     d) 18

- 600 entrevistados usam a pasta de dente da marca A.
- 825 entrevistados usam a pasta de dente da marca B.
- 525 entrevistados usam a pasta de dente da marca C.
- 180 entrevistados usam as pastas de dente das marcas A e B.
- 225 entrevistados usam as pastas de dente das marcas A e C.
- 285 entrevistados usam as pastas de dente das marcas B e C.
- 105 entrevistados usam as pastas de dente das três marcas.
- 135 pessoas entrevistadas não usam as pastas de dente de nenhuma das três marcas.

11. Foi feito um levantamento com as 200 crianças de uma escola. Em uma conversa com os pais sobre o histórico de doenças das crianças, foi verificado que 132 já tiveram catapora, 100 já tiveram sarampo e 46 já tiveram as duas doenças. Com base nos dados anteriores, pergunta-se:

- Quantas crianças não tiveram catapora?
- Quantas crianças não tiveram sarampo?
- Quantas crianças não tiveram nenhuma das duas doenças?

12. (UFPA – 2007) Um professor de Matemática, ao lecionar Teoria dos Conjuntos em uma certa turma, realizou uma pesquisa sobre as preferências clubísticas de seus  $n$  alunos, tendo chegado ao seguinte resultado: 23 alunos torcem pelo Paysandu Sport Club; 23 alunos torcem pelo Clube do Remo; 15 alunos torcem pelo Clube de Regatas Vasco da Gama; 6 alunos torcem pelo Paysandu e pelo Vasco; 5 alunos torcem pelo Vasco e pelo Remo. Se designarmos por A o conjunto dos torcedores do Paysandu, por B o conjunto dos torcedores do Remo e por C o conjunto dos torcedores do Vasco, todos da referida turma, teremos, evidentemente,  $A \cap B = \emptyset$ . Concluimos que o número  $n$  de alunos desta turma é:

- |       |       |
|-------|-------|
| a) 49 | d) 45 |
| b) 50 | e) 46 |
| c) 47 |       |

13. Se  $A \not\subset B$  e  $B = \{10, 23, 12, \{1, 2\}\}$ , então A pode ser:

- |                     |                                 |
|---------------------|---------------------------------|
| a) $\{10\}$         | d) $\{15, 12\} \cap \{13, 12\}$ |
| b) $\{1\}$          | e) $\{10, 23, 12, \{1, 2\}\}$   |
| c) $\{10, 23, 12\}$ |                                 |

14. Se  $A \subset B$  e  $B = \{10, 23, 12, \{1, 2\}\}$ , então  $A \cup B$  é:

- |                     |                                 |
|---------------------|---------------------------------|
| a) $\emptyset$      | d) $\{15, 10\} \cap \{13, 10\}$ |
| b) $\{1\}$          | e) $\{10, 23, 12, \{1, 2\}\}$   |
| c) $\{10, 23, 12\}$ |                                 |

15. (UFMG – 2007) Uma escola realizou uma pesquisa sobre os hábitos alimentares de seus alunos. Alguns resultados dessa pesquisa foram: 82% do total de entrevistados gostam de chocolate; 78% do total de entrevistados gostam de *pizza*; e 75% do total de entrevistados gostam de batata frita. Então, é CORRETO afirmar que, no total de alunos entrevistados, a porcentagem dos que gostam, ao mesmo tempo, de chocolate, de *pizza* e de batata frita é, pelo menos, de:

- |        |        |
|--------|--------|
| a) 25% | c) 35% |
| b) 30% | d) 40% |

16. (FEI-SP – 2006) Sejam os conjuntos numéricos  $A = \{2, 4, 8, 12, 14\}$ ;  $B = \{5, 10, 15, 20, 25\}$  e  $C = \{1, 2, 3, 18, 20\}$  e  $\emptyset$  o conjunto vazio. É correto afirmar que:

- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| a) $B \cap C = \emptyset$                     | d) $(A - C) \cap (B - C) = \emptyset$ |
| b) $A - C = \{-6, 1, 2, 4, 5\}$               | e) $A \cup C = \{3, 6, 11, 20, 34\}$  |
| c) $A \cap C = \{1, 2, 3, 4, 8, 12, 14, 20\}$ |                                       |

17. (UFPA – 2008) Feita uma pesquisa entre 100 alunos, do ensino médio, acerca das disciplinas português, geografia e história. Constatou-se que 65 gostam de português, 60 gostam de geografia, 50 gostam de história, 35 gostam de português e geografia, 30 gostam de geografia e história, 20 gostam de história e português e 10 gostam dessas três disciplinas. O número de alunos que não gostam de nenhuma dessas disciplinas é:

- a) 0
- b) 5
- c) 10
- d) 15
- e) 20

18. (UEA – 2005) Quantos são os subconjuntos de  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  que contêm pelo menos um múltiplo de 3?

- a) 32
- b) 36
- c) 48
- d) 60
- e) 64

19. (UERGS – 2005) Oitenta alunos de uma sala de aula responderam às duas questões de uma prova, verificando-se os seguintes resultados:

- I. 30 alunos acertaram as duas questões.
- II. 52 alunos acertaram a 1ª questão.
- III. 44 alunos acertaram a 2ª questão.

Nessas condições, conclui-se que:

- a) nenhum aluno errou as duas questões.
- b) 36 alunos acertaram somente uma questão.
- c) 72 alunos acertaram pelo menos uma questão.
- d) 16 alunos erraram as duas questões.
- e) não é possível determinar o número de alunos que erraram as duas questões.

20. (Ibmec-SP – 2008) Todos os candidatos inscritos num vestibular escolheram na ficha de inscrição que preencheram uma única entre as três seguintes situações prévias (em relação ao ano anterior): frequentou um cursinho, acabou de sair do ensino médio ou estudou sozinho. Por um erro no processamento dos dados, foi gerado um relatório sobre essas respostas apenas com as seguintes informações:

- 800 não fizeram cursinho,
- 1200 não acabaram de sair do ensino médio,
- 1500 não ficaram estudando sozinhos durante o último ano.

Com isso, conclui-se que o número total de inscritos foi igual a:

- |           |           |
|-----------|-----------|
| a) 1.250. | d) 3.500. |
| b) 1.750. | e) 4.750. |
| c) 2.500. |           |

21. (Ibmec-SP – 2007) Em certo país, sabe-se que:

- todo médico usa roupa branca;
- nem todas as pessoas que usam roupa branca trabalham em hospitais.

Uma pessoa faz as afirmações seguintes referindo-se a esse país:

- I. Somente médicos trabalham em hospitais;
- II. Existem médicos que não trabalham em hospitais;
- III. Algumas pessoas que trabalham em hospitais não usam roupa branca.

Pode-se concluir que é (são) necessariamente verdadeira(s):

- |                            |                                 |
|----------------------------|---------------------------------|
| a) as afirmações II e III. | d) a afirmação I.               |
| b) a afirmação III.        | e) nenhuma das três afirmações. |
| c) a afirmação II.         |                                 |
-

2

**Conceitos  
Fundamentais  
da Álgebra e  
Aritmética**



## 2. Conceitos Fundamentais da Álgebra e Aritmética

A Álgebra e a Aritmética, desde o descobrimento da Matemática, têm contribuído, de diversas formas, para o desenvolvimento do mundo que conhecemos. Elas são de fundamental importância, também, para outras áreas do conhecimento. Sendo assim, é de extrema importância que estes conceitos sejam dominados e carregados por toda a vida acadêmica.



### OBJETIVOS

- Realizar e compreender as operações com potências;
- Apresentar noções de raízes, bem como realizar operações com elas;
- Apresentar as expressões algébricas;
- Realizar operações algébricas;
- Apresentar noções de fatoração;
- Apresentar os principais produtos notáveis.

### 2.1 Potências

No capítulo anterior, conversamos sobre as operações de soma, subtração, produto e divisão. Agora, vamos falar um pouco sobre as potências. O que são elas? Define-se potência de base  $a$  e expoente  $n$  (lembre-se desta definição!) o número  $a^n$  tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall n \end{cases}$$

Pense, inicialmente, nesta definição para os números Naturais. Teríamos, por exemplo,  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ ,  $2^3 = 2 \cdot 2^2 = 8$ , e assim sucessivamente. Pode-se provar que não apenas vale para os Naturais, como também para os Inteiros, Racionais e Reais. Ou seja, em qualquer número de que tratamos pode-se efetuar a operação de potenciação. Utilizando a definição mais geral, considerando o conjunto  $\mathbb{R}$ .

Decorrem da definição as seguintes propriedades, para  $a \in \mathbb{R}_+^*$ :

**I.**  $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**II.**  $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**III.**  $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**IV)**  $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**V.**  $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,

**VI.**  $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Guarde bem essas propriedades. Você verá, em breve, que elas são suficientes para resolver praticamente todos os problemas envolvendo potenciação!

## 2.2 Raízes

Após o início do estudo da potenciação, imagine que possamos realizar a operação inversa. Queremos obter um número  $b$ , tal que  $b^n = a$ . Veja que isto significa efetuar, sobre  $a$ , uma operação inversa à potenciação, de fato. Para que fique mais simples de você entender, vamos começar com  $a = 2$ .

### – Raiz quadrada

O número  $b = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$  é denominado raiz quadrada do número  $a \geq 0$ , de modo que  $b^2 = a$  e  $b \geq 0$ . Entendeu? Antes, efetuamos a potenciação de  $b$ . Agora, queremos obtê-lo novamente e precisamos extrair a raiz.

No entanto, tenha bastante cuidado! Analisando a equação  $x^2 = a$ , notamos que sua solução é  $x = \pm\sqrt{a}$ , uma vez que  $(-\sqrt{a}) \cdot (-\sqrt{a}) = a$ , certo? Entretanto, não é correto escrever  $\sqrt{25} = \pm 5$ , pois, como definido,  $\sqrt{25} \geq 0$ .

Utilizando a definição  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ , podemos escrever as seguintes propriedades:

**I.**  $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0; \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}.$

**II.**  $\sqrt{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \forall a, b \geq 0.$

$$\text{III. } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}, \forall a, b \leq 0.$$

$$\text{IV. } \sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \forall a \geq 0, b > 0.$$

$$\text{V. } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}, \forall a \leq 0, b < 0.$$

$$\text{VI. Se } 0 < a < b \Rightarrow 0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

$$\text{VII. } \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \geq 0.$$

### **Demonstração da propriedade VI)**

Temos  $0 < a < b \Rightarrow b - a > 0$ . Na próxima seção, veremos que  $b - a = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$ . Desse modo, teremos  $(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) > 0$ . Como  $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ , então teremos  $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0 \Rightarrow \sqrt{b} > \sqrt{a}$ .

### **Demonstração da propriedade VII)**

Se  $a = 0$  ou  $b = 0$ , a igualdade é satisfeita trivialmente.

Temos  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} > a + b, \forall a, b > 0$ . Em consequência, apli-

cando a raiz quadrada a essa desigualdade, teremos  $\sqrt{a+b} < \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$ . Pela

propriedade i), vemos, assim, que  $\sqrt{a+b} < |\sqrt{a} + \sqrt{b}|$ . Como  $\sqrt{a}, \sqrt{b} > 0$ , provamos que  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ , o que conclui a demonstração.

## **– Raiz Cúbica**

Agora que já sabemos tratar de raízes quadradas, vamos passar para  $n = 3$ . Cha-

mamos de raiz cúbica de  $a$  o número  $b = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ , tal que  $b^3 = a$ . Diferentemente da raiz quadrada, tanto  $a$  como  $b$  podem ser negativos, uma vez que, por exemplo, se  $a = -8$ , temos  $b = -2 \Rightarrow b^3 = -8$ . Assim, seguem as propriedades das raízes cúbicas:

$$\text{I. } \sqrt[3]{a^3} = a, \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$\text{II. } \sqrt[3]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\text{III. } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*.$$

## – Raiz n-ésima

Vamos tentar generalizar os conceitos aprendidos anteriormente? Chamamos

de raiz n-ésima de a o número  $b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ , tal que  $b^n = a$ . Analogamente à diferença entre a raiz quadrada e a raiz cúbica, haverá diferença entre a raiz n-ésima para n par e para n ímpar. Lembra que a raiz para n par só pode ser extraída para números positivos?

Sendo assim, se  $n = 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (n par), teremos que  $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}_+$ . Isso mesmo, utilizamos o módulo para que você perceba que o número deve ser obrigatoriamente positivo! Caso  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (n ímpar), teremos  $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}_+$ .

A raiz n-ésima tem as seguintes propriedades,  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n$  ímpar,  $p \in \mathbb{N}'$ :

$$\text{I. } \sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

$$\text{II. } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0.$$

$$\text{III. } \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

$$\text{IV. } \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}} = \sqrt[n \cdot p]{a}.$$

Analogamente, para n par, com  $a > 0$  e  $b > 0$ :

$$\text{I. } \sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

$$\text{II. } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0.$$

$$\text{III. } \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

$$\text{IV. } \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}} = \sqrt[n \cdot p]{a}.$$

## 2.3 Expressões e Operações Algébricas

Já sabemos efetuar operações de soma, subtração, produto, divisão, potenciação e radiciação de uma variável algébrica. Tudo certo até aqui? Agora, iremos estudar as expressões algébricas e a prioridade nas operações que podemos realizar com elas.

Mas, afinal, o que é uma expressão algébrica? Nada mais é do que uma expressão matemática que envolve incógnitas ou variáveis e, eventualmente, números. Elas são conhecidas também como expressões literais.

Vamos a alguns exemplos. Temos que  $2x + 1$  é uma expressão algébrica que contém uma variável ( $x$ ) e que  $3a + 4b + 18c$  é uma expressão algébrica que contém três variáveis ( $a$ ,  $b$  e  $c$ ). Podemos, com essas expressões, realizar todas aquelas operações que aprendemos e já citamos neste tópico.

Elas devem seguir esta prioridade:

- Inicialmente, devem-se realizar as operações de potenciação ou radiciação;
- Em seguida, operam-se os produtos ou quocientes; e
- Por fim, efetuam-se as somas ou as subtrações.

Não esqueça esta ordem! Caso você realize as operações em ordem diferente desta, é muito provável que encontre um resultado diferente do esperado. Lembre-se, ainda, de que devem ser respeitados os parênteses, colchetes e chaves, quando houver.

## 2.4 Fatoração e Produtos Notáveis

No estudo de Cálculo, será necessário, em alguns momentos, o conhecimento de produtos notáveis, de modo que se consiga fatorar expressões com maior facilidade. Mas o que é essa tal fatoração?

Trata-se de escrever expressões polinomiais em forma de produtos, de modo a facilitar na identificação das características dessas expressões. Vamos ver alguns exemplos?



## EXEMPLO

**Exemplo 1.** Seja a expressão  $x^2 + 2x$ . Note que o termo  $x$  é comum aos dois termos. Para fatorar, coloca-se em evidência o termo em comum. Sua forma fatorada seria

$$x^2 + 2x = x(x + 2)$$

Efetue a multiplicação distributiva no lado direito da igualdade. Você concorda que é exatamente a mesma expressão?

Agora, imagine uma expressão com duas variáveis. Como ficaria? Veja o exemplo.

**Exemplo 2.** Seja a expressão  $xy + x + y + 1$ . Aparentemente, não há nada que se possa fazer em termos de fatoração, certo? Mas isso é apenas uma aparência. Olhe com cuidado. Escrevendo  $xy + x + y + 1 = (xy + x) + (y + 1)$ , não alteramos em nada. Apenas separamos os termos para facilitar o entendimento. Agora, colocando  $x$  em evidência no primeiro parêntese, temos  $xy + x + y + 1 = x(y + 1) + (y + 1)$ . Você concorda que  $(y + 1)$  é a mesma coisa que  $1 \cdot (y + 1)$ ? Então, teremos na expressão que  $xy + x + y + 1 = x(y + 1) + (y + 1)$ . Colocando, agora,  $(y + 1)$  em evidência, obtemos  $xy + x + y + 1 = x(x + 1)(y + 1)$ .

Os produtos notáveis, dos quais falamos antes, servem exatamente para facilitar na visualização de algumas fatorações. Nada mais são que fatorações conhecidas, que aparecem com frequência na literatura.

Seguem alguns dos mais importantes:

- I.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- II.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- III.  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- IV.  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- V.  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- VI.  $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
- VII.  $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .
- VIII.  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
- IX.  $(a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + (-1)^{n-1}b^{n-1}) = a^n + b^n$ , se  $n \in \mathbb{N}$  for ímpar.



## ATIVIDADES

01. Calcular as potências a seguir e escrever os números a, b, c e d em ordem crescente:

$$a = 3^3, b = (-2)^3, c = 3^{-2} \text{ e } d = (-2)^{-3}.$$

02. Calcule:

- |             |             |
|-------------|-------------|
| a) $(-4)^2$ | e) $3^0$    |
| b) $(-1)^6$ | f) $3^2$    |
| c) $(-3)^3$ | g) $-(3^2)$ |
| d) $(-2)^0$ | h) $-(1^6)$ |

03. Nos itens abaixo, aplicar as propriedades de potências e, quando for razoável, apresente a resposta:

- |                          |                        |
|--------------------------|------------------------|
| a) $(-7)^3 \cdot (-7)^5$ | d) $[(-12)^3]^6$       |
| b) $(-1)^4 \cdot (-1)^0$ | e) $[(-3)^4]^0$        |
| c) $a^{15} : a$          | f) $(3^4)^2 : (3^2)^3$ |

04. Desenvolva os produtos notáveis a seguir:

- |                   |   |
|-------------------|---|
| a) $(2x + 3)^2$   | d) $\left(\frac{k}{2} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{k}{2} + \frac{2}{3}\right)$ |
| b) $(2a^2 - 3)^2$ |   |
| c) $(a + b - c)$  | e) $(2a^2 + 3b)$  |

05. O número  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$  é racional ou irracional? Justifique.

06. Calcular  $\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2$ .

07. (CESPE - 2012 - TJ-RR - Auxiliar Administrativo) Determinado jogo consiste em explorar o fato de que todo número natural não nulo pode ser escrito como a soma de potências de base 2, distintas, com expoentes inteiros (por exemplo,  $14 = 2 + 4 + 8 = 2 + 2 + 22 + 23$ ,  $17 = 1 + 16 = 20 + 24$ ). No jogo entre os jogadores A e B, B indica os expoentes e A aponta qual é o número natural correspondente.

A respeito desse jogo e do fato mencionado, julgue os itens seguintes.

- a) Caso o jogo fosse invertido, de forma que o jogador A indicasse o número 50 e B tivesse de identificar os expoentes, haveria dificuldade nessa identificação, já que o número 50 pode ser escrito de mais de duas formas diferentes como a soma de potências de base dois. A afirmativa é certa ou errada?

- b) Se B indicar os expoentes 1, 2, 5 e 6, então A acertará se apontar um número menor que 100. A afirmativa é certa ou errada?
- c) Suponha que A tenha acertado ao apontar que o número correspondente é o 37. Então, nesse caso, B indicou os números 0, 2 e 5. A afirmativa é certa ou errada?
- d) Se um número P, par, for escrito como a soma de seis potências de base 2, distintas, então o número  $P/2$  também será escrito como a soma de seis potências de base 2, distintas. A afirmativa é certa ou errada?
- e) Se o jogador A apontar corretamente que o número correspondente é um número par, então entre os expoentes indicados por B não estará o número 1. A afirmativa é certa ou errada?

08. (CEPERJ - 2012 - DEGASE - Psicólogo) Uma quantidade X é dada pela expressão  $X = 0,023^3 + 3 \cdot 2,977^2 \cdot 0,023 + 3 \cdot 2,977 \cdot 0,023^2 + 2,977^3$ .

Desse modo, X é igual a:

- a) 25,2527456
- b) 26,3939392
- c) 27,0000000
- d) 36,0000000
- e) 36,3020293

09. (CONSULPLAN - 2010 - Prefeitura de Campo Verde - MT - Técnico de Informática) Qual é a soma dos valores de x que verifica a equação  $3^{x^2-8x+12} = (9^{x+1})^{x-6}$

- a) 5
- b) 2
- c) 3
- d) 8
- e) 4

10. (FCC - 2010 - TCE-SP - Auxiliar da Fiscalização Financeira) Desenvolvendo  $(\sqrt{27} + \sqrt{3} + \sqrt{2})$ , obtém-se um número da forma  $x + y\sqrt{z}$ , em que x, y e z são racionais. Nessas condições, a soma  $x + y + z$  é um número

- a) cubo perfeito.
- b) menor que 50.
- c) primo.
- d) maior que 70.
- e) divisível por 6.

11. (FCC - 2011 - TRT - 4ª REGIÃO (RS) - Analista Judiciário - Tecnologia da Informação) Dos números que aparecem nas alternativas, o que mais se aproxima do valor da expressão  $(0,619^2 - 0,599^2) \cdot 0,75$  é:

- a) 0,0018.
- b) 0,015.
- c) 0,018.
- d) 0,15.
- e) 0,18.



a)  $10^5$   
b)  $10^4$

$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \dots + a_1 10 + a_0$ , em que  $0 \leq a_i < 10$ , para todo  $0 \leq i \leq n$ . Nesse sistema, por exemplo,  $8.903 = 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$ . Suponha que, em férias, Benivaldo visitou certo país, no qual todas as operações financeiras eram feitas num sistema de numeração de base 6 e cuja unidade monetária era o “delta”. Após ter gasto 2 014 deltas em compras numa loja e percebendo que dispunha exclusivamente de cinco notas de 100 reais, Benivaldo convenceu o dono da loja a aceitar o pagamento na moeda brasileira, dispondo-se a receber o troco na moeda local. Nessas condições, a quantia que ele recebeu de troco, em deltas, era:

- a) 134.  
b) 143.  
c) 145.
- d) 152.  
e) 155.

**Intenção de voto - primeiro turno**

Candidato	1/AGO	17/AGO	31/AGO	7/SET	21/SET	29/SET
A	32%	34%	38%	36%	35%	35%
B	24%	22%	25%	25%	26%	22%
C	14%	19%	21%	22%	26%	27%
Em branco / nulos					11%	11%
Indecisos					5%	5%

Considerando-se que, na pesquisa de 29/set, foram entrevistadas 2.000 pessoas, quantas disseram que pretendiam votar no candidato B?

- a) 700
- b) 660
- c) 540
- d) 440
- e) 350

15. Calcule, quando for possível, em Z:

- a)  $-\sqrt{100}$
- b)  $\sqrt{-81}$
- c)  $\sqrt[3]{-27}$
- d)  $\sqrt[8]{125}$

16. Simplifique as expressões:

- a)  $2\sqrt{150} - 4\sqrt{54} + 6\sqrt{24}$
- b)  $\sqrt[3]{\sqrt{9}} + \sqrt[3]{3}$
- c)  $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81}$

17. Racionalize os denominadores das expressões:

- a)  $\frac{2}{\sqrt{10}}$
- b)  $\frac{2}{2\sqrt{5}}$
- c)  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
- d)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

18. Fatore ao máximo as expressões:

- a)  $4ax - 8ay$
- b)  $x^2 + 6x + 9$
- c)  $a^4 - b^4$
- d)  $\frac{5}{3}a - \frac{1}{5}b$
- e)  $5x^2 + 20x + 20$
- f)  $x^3 - 10x^2 + 25x$

19. Simplifique:

- a)  $(m - 1)^2 - (m + 1)(m - 1)$
- b)  $(x - 2)^2 + x^2 - 2(x - 1)^2$
- c)  $\frac{x^2 + xy}{2x}$
- d)  $\frac{a^4 + a^3b + ab^3 - b^4}{a^2b^2}$

e)  $\frac{4ca + 10ac^2}{12a^2c}$

f)  $\frac{7ax + ay + 7bx + by}{ax - ay + bx - by}$

20. Efetue as operações indicadas:

a)  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} =$

b)  $\frac{x^2 + 8x + 16}{3x + 6} \cdot \frac{x^2 - 4}{5x + 20} =$

c)  $\frac{a+2b}{x+a} - \frac{a-2b}{x-a} - \frac{4bx-2a^2}{x^2-a^2} =$

d)  $\left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right) : \left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) =$

e)  $\frac{x+3}{2(x+1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+3) \cdot (x-3)} =$



## SAIBA MAIS

Em particular, podemos utilizar a expressão i) dos produtos notáveis (aquela que afirma que  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ) para determinar uma identidade que será útil.

Seja a expressão  $y = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ . Podemos escrevê-la na forma

$y = a(x + B)^2 + C$ , de modo a completar o produto notável de que já falamos na variá-

vel  $x$ . Tudo certo até aqui? Temos, então, que  $y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$ . É possível

notar que, somando e subtraindo o fator  $\left(\frac{b^2}{4a}\right)$ , a expressão não se altera. Você concorda?

Assim,  $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ . Chamamos **discriminante**

da equação de segundo grau o termo  $\Delta = b^2 - 4ac$ , de modo que escrevemos

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{2a}.$$

Caso seja necessário resolver uma equação da forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , pode-se utilizar o

artifício aqui apresentado. Temos  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

Esse resultado prova a fórmula de Bhaskara. Se  $\Delta = 0$ , teremos  $x = -\frac{b}{2a}$ . Fantástico, não?

---



3

# Proporcionalidade

### 3. Proporcionalidade

No dia-a-dia, utilizamos a proporcionalidade nas mais diversas situações: desde dividir a conta com os amigos em um restaurante até definir quantos dias serão necessários para completar uma obra de construção.

Neste capítulo, trataremos de conceitos fundamentais, tais como razão e divisão proporcional, e completando com as regras de três simples e composta.



#### OBJETIVOS

- Apresentar o conceito de razão;
- Realizar divisões proporcionais;
- Apresentar os conceitos de regras de três simples e composta.

#### 3.1 Razão

Dadas duas grandezas,  $a$  e  $b$  ( $b \neq 0$ ), definimos a razão entre  $a$  e  $b$ , nesta ordem,

como o quociente entre  $a$  e  $b$  e escrevemos  $\frac{a}{b}$  ou  $a : b$ .



#### EXEMPLO

Qual a razão entre  $a = 18$  e  $b = 20$ , nesta ordem?

$$\frac{a}{b} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

Podemos dizer que  $a:b = 18:20$  ou  $a:b = 9:10$

A razão  $\frac{a}{b} = \frac{10}{9}$  é chamada de razão inversa. Você deve observar que o produto de razões inversas é igual a 1. Veja:

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{90}{90} = 1$$

Você sabe o que é uma proporção? Veja nosso exemplo!

Numa loja A, um caderno custa R\$ 10,00. Se comprarmos dois cadernos idênticos nessa loja, pagaremos, é claro, R\$ 20,00. Então, podemos falar que:

$$\frac{1}{10} = \frac{2}{20} \text{ ou } 1:10 :: 2:20 \text{ ( lê-se: 1 está para 10 assim como 2:20)}$$

Então você percebeu?

A igualdade entre duas razões é uma proporção. Então,  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  forma uma proporção.

Os termos a e d são os extremos, enquanto b e c são os meios. Essa proporção também pode ser escrita da seguinte forma:

$$a:b :: c:d$$

A propriedade fundamental das proporções nos fala que:

“Em toda proporção, o produto dos termos chamados meios é igual ao produto dos termos chamados extremos”.

## ★ EXEMPLO

As razões  $\frac{12}{18}$  e  $\frac{2}{3}$  são iguais, logo determinam a proporção  $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ , então,

$$12 \times 3 = 18 \times 2.$$

A propriedade fundamental é utilizada para resolver uma série de problemas. Vejamos alguns.

**Problema 1:** A razão entre as idades de duas pessoas é, atualmente, de  $\frac{3}{4}$ . Há dez anos, essa razão era de  $\frac{1}{3}$ . Pode-se afirmar que a diferença das idades é:

- a) 1 ano.
- b) 3 anos.
- c) 4 anos.
- d) 6 anos.
- e) 10 anos.

**Solução:** Sejam x e y as idades atuais, temos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \text{ e } \frac{x-10}{y-10} = \frac{1}{3}$$

Resolvendo o sistema de equações, encontramos  $x = 12$  e  $y = 16$

Logo, a diferença é de 4 anos.

Resposta: letra (c)



**Problema 2 (Banco do Brasil):** Uma empresa tem atualmente 2100 funcionários. Se a relação entre o número de efetivos e contratados é de 5 por 2, quantos são os efetivos?

- a) 600
- b) 1.000
- c) 1.500
- d) 1.600
- e) 1.800

**Solução:** Seja  $n$  o número de efetivos. Podemos concluir que:

O número de contratados será  $2100 - n$ . Sabemos que a relação entre número de efetivos e contratados é de 5 para 2; logo, teremos:

$$\frac{n}{2100 - n} = \frac{5}{2}$$

$$2n = 5(2100 - n)$$

$$2n = 10500 - 5n$$

$$7n = 10500$$

$$n = 1500$$

Resposta: letra (c)

**Problema 3 (TFC):** Achar uma fração equivalente a  $7/8$  cuja soma dos termos é 120.

- a) 52/68
- b) 54/66
- c) 56/64
- d) 58/62
- e) 60/60

**Solução:** Sejam  $N$  o numerador da fração e  $120 - N$  o denominador, temos que:

$$\frac{N}{120 - N} = \frac{7}{8}$$

$$8N = 7(120 - N)$$

$$8N = 840 - 7N$$

$$15N = 840$$

$$N = 56$$

$$120 - N = 64$$

Logo,  $\frac{56}{64}$

**Resposta:** Letra (c)

---

Você analisou as respostas cuidadosamente? Então notou que a única fração que após a simplificação é igual a  $7/8$  é  $56/64$  e que todas têm soma do numerador com o denominador igual a 120. Portanto, poderíamos resolver utilizando as opções.

### 3.2 Divisão Proporcional

Diversas situações do cotidiano podem ser solucionadas com conhecimentos de divisão proporcional. Senão vejamos:

Mário e Carlos entraram num bar para tomar chope. Depois de algumas horas, Mário tinha tomado 5 chopes, enquanto Carlos havia tomado 7 chopes. Pediram a conta e esta veio sem os 10% de praxe, com o valor de R\$ 120,00. Quanto deve pagar cada um?

Você concorda que a divisão mais justa é a divisão proporcional? Se você concorda com isso, como efetuar essa divisão?

Suponha que Mário pague a quantia de X reais. Caberia, obviamente, a quantia de  $120 - x$  para Carlos. Como essa divisão deve ser proporcional, temos:

$$\frac{x}{5} = \frac{120 - x}{7}$$

$$7x = 5(120 - x)$$

$$7x = 600 - 5x$$

$$12x = 600$$

$$x = 50 \text{ (quantia que Mário deve pagar)}$$

$$120 - x = 70 \text{ (quantia que Carlos deve pagar)}$$

Como podemos estender essa situação para mais de duas pessoas?

Suponhamos que dessa vez, Mário, Carlos e Paulo entraram no bar e que, após algumas horas, Mário bebeu 5 chopes, Carlos, 7 chopes e Paulo, 9 chopes e que a conta veio R\$210,00, sem os 10%, ou seja, a gorjeta não está incluída. Você concorda que R\$ 70,00 para cada um não seria justo?

Depois de analisar com atenção a situação proposta, percebemos que:

Caso a divisão fosse realizada em partes iguais, Mário estaria pagando mais pelo chope e Paulo estaria pagando menos. O preço do chope deve ser igual para todos. Suponha que esse preço seja P, então teremos:

Quantia a ser paga por Mário: 5P

Quantia a ser paga por Carlos: 7P

Quantia a ser paga por Paulo: 9P

Adicionando as três quantias, teremos:

$$5P + 7P + 9P = 210$$

$$21P = 210$$

$$P = 10 \text{ (Preço do chope)}$$

Mário deve pagar: R\$ 50,00

Carlos deve pagar: R\$ 70,00

Paulo deve pagar: R\$ 90,00

Vejamos a questão do concurso do Banco do Brasil.

Numa loja de automóveis, os vendedores recebem comissões proporcionais ao número de carros que vendem. Se, em uma semana, o gerente pagou um total de R\$ 8280,00 a quatro funcionários que vendem 3, 6, 7 e 9 carros, respectivamente, quanto ganhou o que menos carros vendeu?

Devemos observar que a comissão por cada carro é constante; o que varia é a quantidade de carros vendidos. Sendo assim, quem vende mais ganha mais e quem vende menos ganha menos, justo?

Não entraremos no mérito da questão se é justo ou não é assim que a matemática funciona.

Seja  $C$  a comissão por venda de um automóvel, então a quantia que cada um deve receber de comissão deverá ser:

$3C$ ,  $6C$ ,  $7C$  e  $9C$

Logo, temos:

$$3C + 6C + 7C + 9C = 8280$$

$$25C = 8280$$

$$C = 331,20$$

Logo, quem recebe menos recebe:

$$3 \times 331,20 = 993,60$$

Resposta: R\$ 993,60

Agora que você já está dominando divisão proporcional, vamos a mais uma situação-problema?

Guilherme e Luiza compraram um bilhete de loteria para o qual contribuíram com R\$ 5,00 e R\$ 2,00, respectivamente. Se o prêmio de R\$ 105 000,00 foi dividido proporcionalmente à contribuição de cada um, qual a parte, em reais, que caberá ao Guilherme?

Comparado com Luiza, Guilherme deve ganhar mais, pois pagou mais pela compra do bilhete. Sejam  $5K$  e  $2K$  as quantias que Guilherme e Luiza devem receber respectivamente. Temos:

$$5K + 2K = 105\ 000$$

$$7K = 105\ 000$$

$$K = 15\ 000$$

Guilherme deve receber  $5 \times 15000 = \text{R\$ } 75\,000,00$ .

Até este momento trabalhamos com grandezas chamadas diretamente proporcionais e, quando as grandezas forem inversamente proporcionais, como será que devemos proceder? Vejamos o exemplo abaixo.

Dividindo 340 em partes inversamente proporcionais a 2, 3, 5 e 10, qual a menor parte obtida?

Sejam a, b, c e d as partes da divisão. Nesse caso, sabemos que  $2a=3b=5c=10d$ . Escrevendo a igualdade de outra forma, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{5}} = \frac{d}{\frac{1}{10}}$$

Então, como podemos observar, basta dividir em partes diretamente proporcionais aos inversos; logo:

$$1/2 k + 1/3 k + 1/5 k + 1/10 k = 340$$

$$15k + 10k + 6K + 3K = 340 \times 30$$

$$34K = 340 \times 30$$

$$K = 300$$

$$d = 1/10 \times 300 = 30$$

Você observou que, para dividir em quantidades inversamente proporcionais, basta dividirmos em partes diretamente proporcionais aos inversos. Vejamos o próximo problema:

Dividindo-se  $\text{R\$ } 3\,800,00$  em partes inversamente proporcionais a 1, 3 e 4, qual o valor da menor parte?

Para resolvermos o problema, basta dividirmos em partes diretamente proporcionais aos inversos, ou seja, 1,  $1/3$  e  $1/4$ .

Logo, teremos:

$$K + 1/3 k + 1/4 k = 3800$$

$$12K + 4K + 3K = 3800 \times 12$$

$$19 K = 3800 \times 12$$

$$K = 2400$$

A menor parte é igual a  $1/4 \times 2400 = \text{R\$ } 600,00$

Fácil, não?

Vejamos o próximo problema.

X é inversamente proporcional a Y. Quando X vale 12, Y vale 4. Qual o valor de X quando Y vale 6?

Podemos dizer que  $X \cdot Y = K$ , logo:

$$12 \times 4 = K = X \cdot 6$$

$$6X = 48$$

$$X = 8$$

Agora que você já domina divisão proporcional, podemos pensar nos problemas chamados de regra de três. Vejamos um exemplo dos mais simples.

### 3.3 Regra de Três Simples e Composta

Para se construir um muro de  $17 \text{ m}^2$ , são necessários 3 trabalhadores. Quantos trabalhadores serão necessários para construir um muro de  $51 \text{ m}^2$ ?

É razoável pensar em três trabalhadores com a mesma capacidade de trabalho. Portanto, cada trabalhador constrói  $17/3 \text{ m}^2$ . Se pensarmos num muro de  $51 \text{ m}^2$  com a mesma dificuldade de construção, precisaremos de  $51:17/3$ . Logo, serão necessários 9 homens para construírem o muro.

Podemos pensar nesse problema estabelecendo uma relação entre número de trabalhadores, capacidade de trabalho e metros quadrados. Vejamos:

Números de metros quadrados = capacidade de trabalho x número de trabalhadores

Portanto, podemos elaborar as seguintes equações:

$$17 = C \times 3 \text{ (equação 1)}$$

$$51 = C \times N \text{ (equação 2, em que N é o número trabalhadores)}$$

Tirando o valor de C nas duas equações e igualando, temos:

$$17/3 = 51/N$$

$$N = 51 \times 3 / 17$$

$$N = 9 \text{ homens}$$

Devemos observar que as grandezas  $17 \text{ m}^2$ ,  $51 \text{ m}^2$ , 3 e N formam uma proporção.

$$17/51 = 3 / N$$

$$N = 9 \text{ homens}$$

Vejamos outro problema do nosso cotidiano.

Um automóvel com velocidade de 80 km/h gasta 15 minutos em certo percurso. Se a velocidade for reduzida para 60 km/h, que tempo, em minutos, será gasto no mesmo percurso?

Podemos definir uma função distância que será expressa por:

$$\text{Distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}$$

Logo, temos duas equações:

$$D = 80 \times 1/4 \text{ (1/4 de hora)}$$

$$D = 60 \times T$$

Como a distância é a mesma, concluímos que:

$$60 \times T = 80 \times 1/4$$

$$T = 1/3 \text{ da hora, ou seja, 20 minutos.}$$

Simple, não é?

Acho que agora podemos atacar um problema mais difícil, não?

Vejamos o seguinte problema:

Se aumentarmos em 60% a velocidade de um automóvel, o tempo necessário para efetuar certo trajeto diminuirá em:

- |          |          |
|----------|----------|
| a) 62,5% | d) 37,5% |
| b) 60%   | e) 30%   |
| c) 40%   |          |

Podemos utilizar a mesma função do exercício anterior, ou seja:

$$\text{Distância} = \text{Velocidade} \times \text{Tempo}$$

Vamos equacionar o problema:

$$D = V \times T$$

$$D = (V + 0,6 V) \cdot T_1 \text{ (velocidade aumentada em 60\%)}$$

$$V \times T = 1,6 V \times T_1$$

$$T_1 = T : 1,6$$

$$T_1 = T \times 0,625$$

$$T_1 = 62,5\% \text{ de } T$$

Logo, houve uma redução de  $100 - 62,5 = 37,5$ , que corresponde a 37,5% do tempo inicial.

Vejamos outro problema.

Numa gráfica existem 3 impressoras *offset* que funcionam ininterruptamente 10 horas por dia, durante 4 dias, imprimindo 240 000 folhas. Tendo-se quebrado uma das impressoras e necessitando-se imprimir, em 6 dias, 480 000 folhas, quantas horas por dia deverão funcionar ininterruptamente as duas máquinas restantes?

Podemos montar uma equação para resolver o problema. Vejamos:

Número de folhas = número de máquinas x número de horas por dia x número de dias x capacidade da máquina

Temos:

$$240\,000 = 3 \times 10 \times 4 \times C$$

$$C = 2\,000$$

$$480\,000 = 2 \times T \times 6 \times 2\,000$$

$$24\,000 T = 480\,000$$

$$T = 20 \text{ horas por dia}$$

Bem! Agora que você já domina razoavelmente os problemas de regra de três podemos, fazer uma abordagem mais tradicional. As regras de três se classificam em simples ou compostas. Quando simples, subdividem-se em direta ou inversa.

- **Regra de três simples direta:** envolve duas grandezas diretamente proporcionais.

- **Regra de três simples inversa:** envolve duas grandezas inversamente proporcionais.

- **Regra de três composta:** envolve mais de duas grandezas.

Vamos a alguns exemplos.



## EXEMPLO

**Problema 1 (Telerj):** Em uma hora, 4 máquinas produzem 1 200 parafusos. Nesse mesmo tempo, 3 máquinas produzirão quantos parafusos?

**Solução:** Trata-se de um problema de regra de três simples direta. Diminuindo o número de máquinas, a produção também diminuirá. Logo, teremos:

4 máquinas ————— 1 200 parafusos

3 máquinas ————— x parafusos

$$4/3 = 1\,200/x$$

$$4x = 3 \cdot 1\,200$$

$$4x = 3\,600$$

$$X = 900 \text{ parafusos}$$

**Problema 2 (TTN):** Quanto tempo levariam 10 homens para furar um buraco que 40 homens furaram em 80 horas?

**Solução:** Trata-se de um problema de regra de três simples e inversa. Se diminuirmos o número de homens trabalhando, o número de horas aumentará.

40 homens ————— 80 horas

10 homens ————— x horas

Devemos inverter uma das razões. Portanto, teremos:

$$40/10 = x/80 \text{ (razão invertida)}$$

$$4 = x/80$$

$$X = 320 \text{ horas}$$

**Problema 3:** Seis galinhas botam 30 ovos em 5 dias. Quantos ovos colocarão 20 galinhas em 10 dias?

**Solução:** Agora, temos um problema de regra de três composta. Note que, aumentando o número de galinhas, aumenta também o número de ovos. Da mesma maneira, aumentando o número de dias, aumenta o número de ovos. Sendo assim, a quantidade de ovos é diretamente proporcional à quantidade de galinhas e à quantidade de dias.

Logo, temos

30 ovos ————— 6 galinhas ————— 5 dias

x ovos ————— 20 galinhas ————— 10 dias

Temos, desse modo, que

$$\frac{30}{x} = \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{10} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 20 \cdot 30}{6 \cdot 5} = 200 \text{ ovos}$$

Viu como é simples?



## ATIVIDADES

01. Uma engrenagem de 20 dentes movimenta outra de 35 dentes. Quantas voltas dá a maior, enquanto a menor dá 100 voltas?

02. Sabe-se que 3 homens, operando 3 horas por dia, durante 3 dias, produzem 3 toneladas de certo produto. Quantas toneladas do mesmo produto seriam produzidas por 5 homens, operando 5 horas por dia, durante 5 dias?



03. Um ônibus, rodando 6 horas por dia durante 10 dias, gasta R\$2.026,00 em combustível. Quanto será gasto, em um mês, se este ônibus rodar 4 horas por dia?

04. Se  $\frac{1}{4}$  de um trabalho foi feito em 12 dias por 20 operários que trabalhavam em 6 horas por dia, quantos dias serão necessários para terminar o trabalho, sabendo que 8 operários foram dispensados e que o restante agora trabalha 8 horas por dia?

05. Um corredor leva 30 min para percorrer 5 km. Considerando que ele se mantivesse correndo na mesma velocidade, após quanto tempo ele alcançaria o km 20?

06. Em um campeonato de futebol, os três jogadores que cometeram menos faltas receberão um prêmio de R\$ 5 700,00 rateados em partes inversamente proporcionais ao número de faltas cometidas em todo o campeonato. Os jogadores cometeram 3, 9 e 12 faltas. Qual a premiação referente a cada um deles, respectivamente?

07. Três trabalhadores devem dividir R\$ 1.500,00 referentes ao pagamento por um serviço realizado. Eles trabalharam 3, 5 e 8 dias, respectivamente, e devem receber uma quantia diretamente proporcional ao número de dias trabalhados. Quanto deverá receber cada um?

08. (Unicamp) Na planta de um edifício em construção, cuja escala é 1:50, as dimensões de uma sala retangular são 10 cm e 8 cm. Calcule a área da sala projetada.

09. (ENEM) Um comerciante contratou um novo funcionário para cuidar das vendas. Combinou pagar a essa pessoa R\$120,00 por semana, desde que as vendas se mantivessem em torno dos R\$ 600,00 semanais e, como um estímulo, também propôs que, na semana na qual ele vendesse R\$1.200,00, ele receberia R\$ 200,00, em vez de R\$ 120,00. Ao término da primeira semana, esse novo funcionário conseguiu aumentar as vendas para R\$ 990,00 e foi pedir ao seu patrão um aumento proporcional ao que conseguiu aumentar nas vendas. O patrão concordou e, após fazer algumas contas, pagou ao funcionário a quantia de

- |              |              |
|--------------|--------------|
| a) R\$160,00 | d) R\$180,00 |
| b) R\$165,00 | e) R\$198,00 |
| c) R\$172,00 |              |

10. (Mack) O consumo de combustível de um carro de Fórmula 1 é de 2 litros por km rodado. A bomba de reabastecimento injeta 12 litros por segundo. Durante uma parada para reabastecer, supondo que o tanque esteja vazio, injeta-se gasolina por 7 segundos. Se a extensão

da pista é de 3,5 km, a quantidade máxima de voltas que ele pode percorrer, antes de um novo reabastecimento, é:

- a) 13
- b) 14
- c) 15
- d) 12
- e) 16

11. (Mack) Uma empresa de telefonia celular oferece planos mensais, de 60 e 100 minutos, a preços fixos e proporcionais. Para cada minuto em excesso, é cobrada uma tarifa de R\$ 3,00. Um usuário optou pelo plano de 60 minutos, a um custo mensal de R\$ 105,00. No primeiro mês, ele utilizou 110 minutos. Se ele tivesse optado pelo plano de 100 minutos, teria economizado:

- a) R\$ 40,00
- b) R\$ 45,00
- c) R\$ 50,00
- d) R\$ 55,00
- e) R\$ 60,00

12. (ENEM) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha. Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

- a) 920 kg
  - b) 800 kg
  - c) 720 kg
  - d) 600 kg
  - e) 570 kg
-



# 4

## **Introdução ao Estudo das Funções**

## 4. Introdução ao Estudo das Funções

Os conceitos de funções surgiram da necessidade humana de quantificar o que fosse necessário. Ao longo de seu estudo, foram descobertos vários exemplos de como as funções estão presentes no universo: crescimento populacional, proliferação de microrganismos e decaimento radioativo são alguns deles.

Para entender estes comportamentos, deve-se dominar os conceitos básicos de funções, os quais serão apresentados neste Capítulo.



### OBJETIVOS

- Apresentar os conceitos básicos e notações das funções;
- Apresentar noções de produto cartesiano;
- Definir domínio, contradomínio e imagem de uma função;
- Definir funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas;
- Definir funções pares e ímpares;
- Apresentar noções de funções compostas;
- Apresentar a definição do gráfico de uma função;
- Mostrar e realizar operações com as principais funções algébricas.

### 4.1 Conceito e Notações

Nesse momento, vamos estudar as funções. O que são? Dados dois conjuntos  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}$ , uma relação  $f$  de  $A$  em  $B$  é definida função de  $A$  com imagem em  $B$  se, e somente se,  $\forall x \in A$ , existir apenas um  $y \in B$  tal que  $(x, y) \in f$ .

Desse modo, de acordo com a definição, há dois casos que impossibilitam a relação  $f$  de ser uma função:

- I. Se algum elemento de  $A$  não estiver relacionado a um elemento de  $B$ .
- II. Se um elemento de  $A$  estiver relacionado a mais de um elemento de  $B$ .

### 4.2 Produto Cartesiano

Você lembra que, no capítulo 1, falamos sobre o sistema cartesiano? Ele é a forma de representarmos os pares ordenados, que também definimos anteriormente. Define-se **produto cartesiano** de  $A$  por  $B$  o conjunto  $A \times B$  cujos elementos são pares ordenados  $(x, y)$  tais que  $x \in A$  e  $y \in B$ . Assim,  $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$ .

Você acha que, em termos de produto cartesiano,  $A \times B = B \times A$ ? A resposta é não. Veja por quê.



## EXEMPLO

Exemplo: Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{2, 3\}$ . Efetue os produtos cartesianos  $A \times B$  e  $B \times A$ .

Temos que  $A \times B$  é dado por

$$A \times B = \{(1, 2); (2, 2); (3, 2); (4, 2); (1, 3); (2, 3); (3, 3); (4, 3)\}$$

Em contrapartida,  $B \times A$  é dado por

$$B \times A = \{(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4)\}$$

Veja que os produtos são, de fato, diferentes!

## 4.3 Domínio, Contradomínio e Imagem

Em termos de notação, chamamos  $f: A \rightarrow B$  a função  $f$  de  $A$  em  $B$ . Define-se **domínio** (D) o conjunto dos elementos  $x \in A$  para os quais  $\exists y \in B$  tais que  $(x, y) \in f$ . Como, pela definição de função, todos os elementos de  $A$  satisfazem essa condição, então o conjunto  $A$  é o domínio da função  $f$ .

Define-se como **contradomínio** (CD) o conjunto de todos os elementos  $y \in B$ .

No entanto, não necessariamente todos os elementos de  $B$  têm associação com os elementos de  $A$ . Desse modo, é conveniente adotar o conjunto **imagem** (Im) dos elementos  $y \in B$  correspondentes a algum  $x \in A$ .

Também podemos dizer que  $f: A \rightarrow B$  e  $g: C \rightarrow D$  são iguais se, e somente se,  $A = C$ ,  $B = D$  e  $f(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in A$ .



## ATIVIDADES

01. Sejam os conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{4, 6, 7, 8\}$  e a relação  $f$  de  $A$  em  $B$  tal que  $f = \{(1, 6), (2, 4), (3, 7)\}$ . Determine:

- o conjunto de partida.
- o conjunto de chegada.
- o domínio de  $f$ .
- o conjunto imagem de  $f$ .

02. Sejam os conjuntos  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $R: A \rightarrow B$  definida por  $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 3\}$ .

- a) Dê os pares ordenados de  $R$ .
- b) Determine o domínio e a imagem de  $R$ .

03. Se  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$  e  $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 4\}$ , quais são o domínio e a imagem da relação  $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ ?

04. Seja  $f$  a função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - 3x + 4$ . Calcule:

- a)  $f(-1)$
- b)  $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- c)  $f\left(-\frac{1}{3}\right)$
- d)  $f(\sqrt{3})$
- f)  $f(1 - \sqrt{2})$

05. Seja a função  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $f(x) = 3x - 2$ . Calcule:

- a)  $f(2)$
- b)  $f(-3)$
- c)  $f(0)$
- d)  $f\left(\frac{3}{2}\right)$

06. Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ . Calcule:

- a)  $f\left(-\frac{3}{7}\right)$
- b)  $f(\sqrt{2})$
- c)  $f(\sqrt{4})$
- d)  $f(\sqrt{3} - 1)$
- e)  $f(0,75)$

07. Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \frac{2x - 3}{5}$ . Qual é o elemento do domínio que tem  $-\frac{3}{4}$  como imagem?

08. Seja a função  $y = f(x) = 3x - 1$ . Qual a imagem do elemento 5?
09. Dada a função  $y = f(x) = 2x + 5$ , qual é o elemento do domínio cuja imagem é 11?
10. Encontre os valores de  $x$  para os quais está definida a função  $f(x) = |x| = \sqrt{(x-1)(-x+4)}$ .
11. Dona Clara, de 52 anos, tem dois filhos: um de 23 anos e outro de 26 anos.
- a) Há quanto tempo a soma das idades dos três era 65 anos?
- b) Daqui a quanto tempo a soma das idades dos três será igual a 128 anos?
- 

#### 4.4 Funções Injetivas, Sobrejetivas, Bijetivas e Funções Inversas

Agora que sabemos o que são domínio, contradomínio e imagem, vamos apresentar mais três definições. Primeiro, vamos definir como função **injetiva (ou injetora)** aquela em que um elemento do contra-domínio está associado a, no máximo, um elemento do domínio. Ou seja,  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ .

Ainda, diz-se que uma função é **sobrejetiva (ou sobrejetora)** quando sua imagem é exatamente igual ao contradomínio, isto é, quando todos os elementos do contradomínio estão associados a algum elemento do domínio. Lembre-se: se a função for sobrejetora, não podem sobrar quaisquer elementos no contra-domínio sem associação!

Por fim, uma função será dita **bijetiva (ou bijetora)** quando for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Ora, se isto ocorrer, significa que não sobram elementos no contradomínio sem associação e que cada um destes está associado a um diferente elemento do domínio, certo? Podemos concluir, desse modo, que, em uma função bijetora, é necessária a condição de que o número de elementos nos dois conjuntos seja igual.

Pense um pouco: temos dois conjuntos, ambos com o mesmo número de elementos, em que cada elemento do domínio se relaciona com um diferente elemento do contra-domínio. O que nos impede de dizer que existe uma função que leva, respectivamente, cada um desses elementos do contra-domínio de volta ao domínio? Nada! Na verdade, esse pensamento nos faz introduzir o conceito de função inversa: é toda função bijetora (obrigatoriamente!) dada por  $f^{-1}(x)$  que desfça a operação realizada por  $f(x)$ .





## EXEMPLO

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $y = f(x) = x + 2$ , que realiza a operação de somar 2 unidades à variável  $x$ . A função inversa é obtida isolando-se o valor de  $x$ . Logo,  $x = y - 2$  e, portanto,  $f^{-1}(x) = x - 2$ .

### 4.5 Funções Pares e Ímpares

Já passamos por vários conceitos importantes e agora trataremos de dois tipos específicos de funções: as funções pares e ímpares. Você tem algum palpite sobre o que são elas? Vamos uma a uma.

Entende-se por função par aquela que segue  $f(-x) = f(x)$ ,  $\forall x \in \text{Dom}$ . Isso significa que esta função sempre apresentará o mesmo valor para duas abscissas simétricas! Simples, certo?

Um exemplo de função par é a função  $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{caso } x \geq 0 \\ -x, & \text{caso contrário} \end{cases}$ . Você consegue perceber?

Da mesma forma, define-se função ímpar aquela que segue a regra de  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in \text{Dom}$ , ou seja, duas abscissas simétricas sempre apresentarão ordenadas também simétricas!

Um exemplo de função ímpar é  $f(x) = x$ .

### 4.6 Funções Compostas

Você percebeu, até o momento, a simplicidade das funções das quais tratamos? É possível tornar essas funções mais complexas – por exemplo, utilizando funções compostas. O que são elas? Veja a seguir.

Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$ . Define-se  $h : A \rightarrow C$  a função  $h(x) = f(g(x))$  (lê-se “f composta com g”) ou  $h(x) = f \circ g(x)$  (lê-se “f bola g”).

Tome o seguinte exemplo: Sejam  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $g(x) = x + 3$ . Temos que  $f(g(x)) = f(x + 3) = \sqrt{x + 3}$ . Ainda,  $g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 3$ .

Você percebeu o que fizemos? Primeiro, aplica-se a função de dentro e, em seguida, pode-se aplicar a de fora. É possível, dessa maneira, compor várias funções, com mais de duas ao mesmo tempo. Vamos tentar?

Sejam  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x + 3$  e  $h(x) = \frac{x^2}{2}$ . Determine  $h(f(g(x)))$ .

## 4.7 Gráfico de uma Variável Real

Já sabemos o que são pares ordenados e o que é um produto cartesiano. Agora, vamos definir o gráfico de uma variável como sendo o conjunto dos pares ordenados  $(x, f(x))$ , sendo  $x \in \mathbb{R}$  e  $f(x) \in \mathbb{R}$ , tais que  $x$  pertença ao domínio da função  $f$ .

## 4.8 Funções Algébricas

Vamos ver, agora, funções importantes no nosso estudo: a função constante e a função afim.

### 4.8.1 Função Constante

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , conhecida como função constante. A função constante, como o nome sugere, mapeia todos os pontos do domínio para o valor real  $c$ .

### 4.8.2 Função Afim

A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  é conhecida como função afim. Seu

gráfico é uma reta que toca o eixo  $x$  no ponto  $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$  e o eixo  $y$  no ponto  $(0, b)$ , e está representado a seguir. Quando  $b = 0$ , temos a função  $f(x) = ax$ , conhecida como **função linear**. Nesse caso, se  $a = 1$ , a função  $f(x) = x$  é chamada de **função identidade**.

O coeficiente  $a$  é denominado **coeficiente angular** da reta, enquanto  $b$  é chamado de **coeficiente linear**.

Como visto anteriormente, a função  $f(x) = ax + b$  é uma função do 1º grau. Logo, tem apenas uma raiz real. Fazendo  $f(x) = ax + b = 0$ , temos que a raiz da função afim é dada por  $x = -\frac{b}{a}$ .



## ATIVIDADES

12. Determine a raiz de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = 5x + 10$

b)  $f(x) = x$

c)  $f(x) = (x - 1)^2 - (x + 2)^2$

13. Seja  $f$  dada por  $y = f(x) = x^2 + 3x + 2$ . Calcule  $f(1)$ .

14. São dadas as funções  $f(x) = 3x + 1$  e  $g(x) = \frac{4}{5}x + a$ . Sabendo que  $f(1) - g(1) = \frac{2}{3}$ , calcule o valor de  $a$ .

15. Seja a função definida por  $f(x) = mx + n$ , com  $m, n \in \mathbb{R}$ . Se  $f(2) = 3$  e  $f(-1) = -3$ , calcule  $m$  e  $n$ .

16. Determine o domínio das funções reais:

a)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2-4}}$

b)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2-x}{x^2+2x}}$

17. Determine o domínio da função dada por:

a)  $f(x) = \sqrt{\frac{-x^2+1}{x^2-4x}}$

b)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x^2+x-6}}$

18. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 4x + 7$ . Determine a função inversa.

19. Determine a raiz das seguintes funções:

a)  $f(x) = 3x + 7$

b)  $f(x) = 4 + \frac{7x-5}{8}$



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 1**. Editora: Saraiva, edição 8. Ano 2004.

**Matemática Básica para Cursos Superiores**. São Paulo: Editora Atlas, 2002.



## GABARITO

### Capítulo 1

01.

- a)  $(-5, -1)$ ;                      b)  $(-\infty, 2)$ ;                      c)  $\emptyset$

02. c; e.

03.  $A \cup B = (-3, 2)$ ;  $A \cap B = [0, 2) - \{1\}$

04.

- a)  $E \cap F = [-3, 1)$ ;                      d)  $F \cup G = (-\infty, 5]$ ;  
b)  $E \cap F = (-\infty, 3]$ ;                      e)  $E \cap G = \emptyset$ ;  
c)  $F \cap G = (1, 3]$ ;                      f)  $E \cup G = [-3, 5] - \{1\}$ .

05.

- a) 315                      b) 75                      c) 235                      d) 155

06. **Solução comentada:** Para resolver problemas como este, devemos lançar mão das propriedades que aprendemos dos conjuntos. Leva-se em consideração o número de elementos de cada conjunto.

Sabemos que  $n(\text{Masc} \cup \text{Fem}) = n(\text{Maior} \cup \text{Menor}) = 30$  e que os alunos não podem ser, ao mesmo tempo, do sexo masculino e do sexo feminino, como também não podem ser simultaneamente maiores e menores de idade.

Sendo assim, como  $n(\text{Mas}) = 18$ , temos que  $n(\text{Fem}) = 30 - 18 = 12$  e que  $n(\text{Menor}) = 30 - 13 = 17$ . Ainda, temos a informação de que há 7 alunos do sexo feminino que são menores de idade. Então,  $n(\text{Fem} \cap \text{Menor}) = 7$ . Portanto, como há 17 menores de idade, concluímos que 10 destes são candidatos do sexo masculino.

07. a

08. b

09. a

10. 1.500

11.

- a) 100                      b) 68                      c) 14

12. b

13. b

14. e

15. c

16.

**Solução comentada:** Analisaremos cada item.

(a) Temos que  $B \cap C = \{5, 10, 15, 20, 25\} \cap \{1, 2, 3, 18, 20\}$ . Vemos que o elemento  $\{20\}$  é comum aos dois conjuntos. Logo,  $B \cap C = \{20\}$  e a alternativa é falsa.

(b) Temos que  $A - C = \{2, 4, 8, 12, 14\} - \{1, 2, 3, 18, 20\}$ . Lembre-se de que  $A - C$  representa o conjunto de todos os elementos que pertencem a  $A$  mas não pertencem a  $C$ . Sendo assim,  $A - C = \{4, 8, 12, 14\}$  e a alternativa é falsa.

(c) A interseção  $A \cap C$  é dada por  $A \cap C = \{2, 4, 8, 12, 14\} \cap \{1, 2, 3, 18, 20\} = \{2\}$ . Assim, a alternativa é falsa.

(d) Vimos que  $A - C = \{4, 8, 12, 14\}$ . Ainda,  $B - C = \{5, 10, 15, 20, 25\} - \{1, 2, 3, 18, 20\} = \{5, 10, 15, 25\}$ . Então,  $(A - C) \cap (B - C) = \{4, 8, 12, 14\} \cap \{5, 10, 15, 20\} = \emptyset$ . Logo, esta alternativa é a verdadeira.

(e) Temos  $A \cup C = \{2, 4, 8, 12, 14\} \cup \{1, 2, 3, 18, 20\} = \{1, 2, 3, 4, 8, 12, 14, 18, 20\}$ . Portanto, a alternativa é falsa.

17. a

18. c

19.

Temos que  $n(Q1) = 52$  e  $n(Q2) = 44$ . Além disso, acertaram ambas as questões, isto é,  $Q1 \cap Q2$ , 30 alunos. Ou seja,  $n(Q1 \cap Q2) = 30$ .

Agora, pense um pouco. O número de alunos que acertaram  $Q1$  ou  $Q2$  é dado por  $n(Q1 \cup Q2)$ , certo? Certo. E  $n(Q1 \cup Q2) = n(Q1) + n(Q2)$ , certo? Errado. Ao somar  $n(Q1) + n(Q2)$ , estamos contabilizando duas vezes os alunos que acertaram ambas as questões. Dessa forma, devemos subtrair  $n(Q1 \cap Q2)$  da conta para que o valor esteja correto. Então,  $n(Q1 \cup Q2) = n(Q1) + n(Q2) - n(Q1 \cap Q2) = 52 + 44 - 30 = 66$  alunos acertaram  $Q1$ ,  $Q2$  ou ambas. Então, 66 alunos acertaram pelo menos uma questão.

Sendo assim, como há 80 alunos na sala, então  $80 - 66 = 14$  alunos erraram ambas as questões. Para determinar quantos alunos acertaram apenas uma questão, devemos considerar os alunos que acertaram pelo menos uma questão e subtrair, deste número, aqueles que acertaram ambas. Assim, temos que  $n(Q1 \cup Q2) - n(Q1 \cap Q2) = 66 - 30 = 36$  alunos. Portanto, a resposta correta é o item (b).

20. b

21. e

## Capítulo 2

01.

**Solução comentada:** Temos que  $a = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ ,  $b = (-2) (-2) (-2) = -8$ ,

$$c = (3^{-1})^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ e } d = (-2)^{-3} = ((-2)^{-1})^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Sendo assim, temos que  $b < d < c < a$ .

02.

- |       |        |      |       |
|-------|--------|------|-------|
| a) 16 | c) -27 | e) 1 | g) -9 |
| b) 1  | d) 1   | f) 9 | h) -1 |

03.

- |           |                   |       |
|-----------|-------------------|-------|
| a) $(-7)$ | c) $a^{14}$ ;     | e) 1; |
| b) 1;     | d) $(-12)^{18}$ ; | f) 9  |

04.

- a)  $4x^2 + 12x + 9$ ;  
b)  $4a^4 - 12a^2 + 9$ ;  
c)  $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$ ;  
d)  $\frac{k^2}{4} - \frac{4}{9}$ ;  
e)  $4a^4 - 9b^2$ .

05.

**Solução comentada:** Veremos que este número é racional. Por quê? Tome o número

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2. \text{ Efetuando o produto notável, temos}$$

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 = (4+2\sqrt{3}) + (4-2\sqrt{3}) - 2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} = 8 - 2 \cdot 2 = 4.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade, obtemos  $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$ , que é um número racional (como queríamos demonstrar).

06. 6

07.

- |            |           |
|------------|-----------|
| a) Errada; | d) Certa; |
| b) Errada; | e) Errada |
| c) Errada; |           |

08. c

**Solução comentada:** Lembrando os produtos notáveis, fica simples notar que a expressão  $X$  representa  $(a + b)^3$ , certo? Sendo assim, temos que  $a = 0,023$  e  $b = 2,977$ . Portanto, temos que  $X = (0,023 + 2,977)^3 = (3,000)^3 = 27,0000000$ . A resposta é o item (c).

09. b

10. a

11. c

12. a

13. a

14. d

15.

a) -10;

b)  $\sqrt{2}$ ;

c) -3;

d) 5

16.

**Solução comentada:** (a) Para efetuar as raízes, devemos escrever os números em sua forma fatorada. Temos que  $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ ,  $54 = 2 \cdot 3^3$  e  $\sqrt[3]{\sqrt{9}} = \sqrt[3]{3}$ . Logo, temos  $\sqrt{150} = 5\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{54} = 3\sqrt{6}$  e  $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ . Então, temos que

$$2\sqrt{150} - 4\sqrt{54} + 6\sqrt{24} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{6} - 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} + 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6} \cdot (10 - 12 + 12) = 10\sqrt{6}.$$

(b) Da mesma forma como no item anterior, temos  $24 = 2^3 \cdot 3$ ,  $81 = 3^4$  e  $9 = 3^2$ . Desse

modo, temos  $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$  e  $\sqrt[3]{\sqrt{9}} = \sqrt[3]{3}$ . Então, temos

$$\frac{\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{\sqrt{9}} + \sqrt[3]{3}} = \frac{2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3}} = -\frac{1}{2}$$

17. a)  $\frac{2\sqrt{10}}{10}$ ;    b)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ;    c)  $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ ;    d)  $\sqrt{6} - 2$

18.

**Solução comentada:** (a) Colocando  $4a$  em evidência, temos  $4ax - 8ay = 4a(x - 2y)$ .

(b) Trata-se de um produto notável da forma  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , com  $a = x$  e  $b = 3$ . Logo,  $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ .

(c) Podemos reescrever  $a^4 - b^4$  como  $(a^2)^2 - (b^2)^2$ . Assim, utilizando o produto notável da diferença de quadrados, temos que  $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ . Utilizando novamente o produto notável da diferença de quadrados, obtemos

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$$

(d) Escrevendo a expressão em denominador comum, temos  $\frac{5}{3}a - \frac{1}{5}b = \frac{3a - b}{5}$ .

(e) Colocando 5 em evidência, temos  $5x^2 + 20x + 20 = 5(x^2 + 4x + 4)$ . O trinômio entre parênteses é um produto notável, o quadrado da soma. Logo, temos que  $5x^2 + 20x + 20 = 5(x + 2)^2$ .

(f) Colocando x em evidência, temos  $x^3 - 10x^2 + 25x = x(x^2 - 10x + 25)$ . O trinômio entre parênteses é o quadrado da diferença. Logo, temos que  $x^3 - 10x^2 + 25x = x(x - 5)^2$ .

19.

a)  $2 - 2m$ ;

b)  $x^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right)$

c)  $\frac{5c}{6a} + \frac{1}{3a}$

d) 2;

e)  $-\frac{a^3}{b-a} - \frac{a^3}{a+b} + a^2 - ab + b^2$

f)  $\frac{7x+y}{x-y}$

20. a)  $\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$ ; b) 0; c)  $\frac{(x+1)}{2(x-3)}$ ; d)  $\frac{(x-2)(x+4)}{15}$ ; e)  $\frac{a}{b}$

## Capítulo 3

01.

**Solução comentada:** A quantidade de voltas é inversamente proporcional à quantidade de dentes de cada engrenagem.

Assim, temos:

20 dentes ————— 35 dentes

100 voltas ————— x

Como são inversamente proporcionais,  $\frac{20}{100} = \frac{x}{35} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 35}{100} \rightarrow x = 7$  voltas.

02. Aprox. 14 toneladas

03. R\$ 4.052,00



04. 17 dias

05.

**Solução comentada:** Se o corredor já percorreu 5 km, então faltam 15 km para alcançar o km 20. Então, devemos calcular em quanto tempo ele percorre 15 km.

5 km ————— 30 min

15 km ————— x

Temos  $\frac{5}{15} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 30}{5} = 90 \text{ min}$ . Logo, ele levará mais 90 min.

06. R\$ 3.600, R\$ 1.200 e R\$ 900.

07. R\$ 281,25, R\$ 468,75 e R\$ 750.

08.

**Solução comentada:** Se a escala é 1:50, significa que 1 cm na planta equivale a 50 cm na realidade. Então,

1 cm ————— 50 cm

10 cm ————— x

8 cm ————— y

Temos  $\frac{1}{10} = \frac{50}{x} \rightarrow x = 50 \cdot 10 = 500 \text{ cm} = 5 \text{ m}$  e  $\frac{1}{8} = \frac{50}{y} \rightarrow y = 50 \cdot 8 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$ .

Logo, a área da sala é de  $A = 5 \cdot 4 = 20 \text{ m}^2$ .

09. c

10. d

11.

**Solução comentada:** Se os preços dos planos são proporcionais, calculemos o valor do plano de 100 minutos.

60 min ————— R\$105

100 min ————— x

Então,  $\frac{60}{100} = \frac{105}{x} \rightarrow x = \frac{105 \cdot 100}{60} = \text{R\$}175$ . Como o usuário utilizou 110 min enquanto

havia contratado 60, ele ultrapassou em 50 min seu plano mensal. O valor em excesso é dado por  $V = 50 \cdot 3 = \text{R\$} 150$  e, assim, ele pagou  $T = 105 + 150 = \text{R\$} 255$ .

Caso ele tivesse optado pelo plano de 100 min, ele haveria ultrapassado 10 min. Pagaria, assim, excesso no valor de  $V = 10 \cdot 3 = \text{R\$} 30$  e, com isso, pagaria um total de  $T = 175 + 30 = \text{R\$} 205$ . Portanto, nesse caso, ele poderia ter economizado  $255 - 205 = \text{R\$} 50$ .

12.

**Solução comentada:** A quantidade inicial de alimentos arrecadada foi de  $12 \cdot 10 = 120$  kg. Somando-se 30 pessoas à equipe, passou a haver 50 alunos. Note que a quantidade de alimentos arrecadados aumenta tanto com o aumento de pessoas quanto com o tempo (número de dias e quantidade de horas por dia). Logo, todas as grandezas são diretamente proporcionais. Temos:

20 alunos ————— 10 dias ————— 3h ————— 120 kg  
50 alunos ————— 20 dias ————— 4h ————— x

$$\text{Assim, } \frac{120}{x} = \frac{20}{50} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20} \rightarrow x = \frac{120 \cdot 20}{3} = 800 \text{ kg}.$$

Como já haviam arrecadado 120 kg anteriormente, o total foi de 920 kg. Item (a).

## Capítulo 4

01. a)  $\{1, 2, 3, 4\}$ ;      b)  $\{4, 6, 7, 8\}$ ;      c)  $\{1, 2, 3\}$ ;      d)  $\{6, 4, 7\}$

02. a)  $\{0, 3\}, (1, 4), (2, 5)$ ;  
b)  $D(R) = \{0, 1, 2\}, \text{Im}(R) = \{3, 4, 5\}$

03.  $D(R) = [1, 2], \text{Im}(R) = [2, 4]$

04. a) 8;      b)  $\frac{11}{4}$ ;      c)  $\frac{46}{9}$ ;      d)  $7 - 3\sqrt{3}$ ;      e)  $4 + \sqrt{2}$

05. a) 4;      b) -11;      c) -2;      d)  $\frac{5}{2}$

06. a) 1;      b)  $\sqrt{2} + 1$ ;      c) 1;      d)  $\sqrt{3}$ ;      e) 1

07.  $-\frac{3}{8}$

08. 14

09. 3

10.  $1 \leq x \leq 4$

11.

**Solução comentada:**

- a) Seja  $x$  a quantidade de anos considerada. Nesse tempo, Dona Clara tinha  $52 - x$  anos, e seus filhos tinham  $23 - x$  e  $26 - x$ . Se suas idades eram, somadas, iguais a 65, devemos ter  $52 - x + 23 - x + 26 - x = 65 \rightarrow 101 - 3x = 65 \rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = 12$  anos
- b) Do mesmo modo, daqui a  $x$  anos teremos Dona Clara com  $52 + x$  anos e seus filhos, respectivamente, com  $23 + x$  e  $26 + x$ . Assim, para que a soma seja igual a 128, devemos ter  $52 + x + 23 + x + 26 + x = 128 \rightarrow 101 + 3x = 128 \rightarrow 3x = 27 \rightarrow x = 9$  anos.

12.

**Solução comentada:** Para encontrar as raízes de uma função  $f(x)$ , devemos encontrar todos os valores de  $x$  que satisfaçam  $f(x) = 0$ .

a) Temos  $5x + 10 = 0 \rightarrow 5x = -10 \rightarrow x = -\frac{10}{5} \rightarrow x = -2$ .

b)  $x = 0$  é a raiz desta equação, pois  $f(x) = 0$  apenas se  $x = 0$ .

c) Primeiramente, simplifiquemos a expressão. Temos que  $f(x) = (x - 1)^2 - (x + 2)^2 = (x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 4x + 4) = -6x - 3$

Agora, igualando  $f(x) = 0$ , temos  $-6x - 3 = 0 \rightarrow 6x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ .

13. 6

14.  $\frac{38}{15}$

15.

**Solução comentada:** Se  $f(x) = mx + n$  e o exercício nos fornece dois pontos, devemos substituir cada ponto na função.

Temos que  $f(2) = 3$ . Isto significa que, quando  $x = 2$ ,  $f(x) = 3$ . Logo,  $3 = 2m + n$ .

Ainda,  $f(-1) = -3$ . Isto significa que, quando  $x = -1$ ,  $f(x) = -3$ . Logo,  $-3 = -m + n$ .

Portanto, devemos resolver o sistema.

$$\begin{cases} 2m + n = 3 \\ -m + n = -3 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos  $3m = 6 \rightarrow m = 2$ . Agora, substituindo o valor de  $m$  na segunda equação, obtemos  $-2 + n = -3 \rightarrow n = -1$ .

De fato,  $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$  e  $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$ .

16.

a)  $x > \frac{1}{2}$  ou  $-2 < x < \frac{1}{2}$ ;

b)  $x > \frac{1}{2}$  ou  $x < -2$

17.

a)  $-1 < x < 0$  ou  $1 < x < 4$ ;

b)  $x > 2$  ou  $-3 < x < 2$

18.

**Solução comentada:** A função inversa é obtida isolando-se o valor de  $x$ . Desse modo,

temos que  $y = f(x) = 4x + 7$ . Para a inversa, temos  $y = 4x + 7 \rightarrow 4x = y - 7 \rightarrow x = \frac{y-7}{4}$  e, as-

sim, temos que  $f^{-1}(x) = \frac{x-7}{4}$

19.

**Solução comentada:** Para encontrar a raiz das funções, devemos fazer  $f(x) = 0$ .

a) Temos  $3x + 7 = 0 \rightarrow 3x = -7 \rightarrow x = -\frac{7}{3}$ .

b) Do mesmo modo,

$$4 + \frac{7x-5}{8} = 0 \rightarrow \frac{7x-5}{8} = -4 \rightarrow 7x-5 = -32 \rightarrow 7x = -27 \rightarrow x = -\frac{27}{7}.$$

---



## ANOTAÇÕES



## ANOTAÇÕES



## ANOTAÇÕES



## ANOTAÇÕES





## ANOTAÇÕES